Representation of a solvable Lie group on $\overline{\partial}_b$ cohomology spaces

AUTHOR(S):

野村, 隆昭

数理解析研究所講究録
632巻 1987年 108-133 8

Representations of a solvable Lie group on $\bar{\partial}_b$ cohomology spaces

京大理　野村隆昭(Takaaki NOMURA)

§1. $\mathfrak{g}$を有限次元の実リー代数，jを$\mathfrak{g}$上の実線型作用素で$j^2=-1_{\mathfrak{g}}$をみたすもの，そして$\omega\in\mathfrak{g}^*$（i.e. ωは$\mathfrak{g}$上の一次形式）とする．次の(i)〜(iii)がみたされるとき，3つ組$(\mathfrak{g},j,\omega)$を *normal j-algebra* という．

(i)　$\mathfrak{g}$は完全可解

(ii)　jを$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$上の複素線型作用素に拡張し，$\mathfrak{g}^-$を$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$における$j$の固有値$-\sqrt{-1}$に対応する固有空間とするとき，$\mathfrak{g}^-$は$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$の部分代数

(iii)
$$\begin{cases} \omega([jx,jy])=\omega([x,y]) & \forall x,y\in\mathfrak{g} \\ \omega([x,jx])>0 & \forall x\in\mathfrak{g}\setminus\{0\} \end{cases}$$

さて，$(\mathfrak{g},j,\omega)$を *normal j-algebra* とし，$G=\exp\mathfrak{g}$を$\mathfrak{g}$をリー代数に持つ連結かつ単連結なリー群とする．$\mathfrak{g}$の基本的構造についてはよく知られている．本稿では Rossi and Vergne [7, Theorem 4.3] に従って，次の定理1にまとめておこう．まず，実ベクトル空間$\mathfrak{g}$は内積$\langle x,y\rangle=\omega([x,jy])$

を持ち, jはこの内積で$\mathfrak{g}$上の直交変換になっていることに注意する. また, $\mathfrak{g}$をjによって複素ベクトル空間とみたものを$(\mathfrak{g}, j)$で表すと, $(\mathfrak{g}, j)$はエルミート内積

(1) $$(x, y) = \omega([x, jy]) - i\omega([x, y])$$

を持つ. そして, $\langle x, y\rangle = \mathrm{Re}(x, y)$である.

定理1 (Pyatetskii-Shapiro [6]).

(i) $\mathfrak{n}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$とし, $\mathfrak{a}$を$\mathfrak{g}$における$\langle\cdot,\cdot\rangle$にかんする$\mathfrak{n}'$の直交補空間とする. このとき, $\mathfrak{a}$は$\mathfrak{g}$の可換部分代数で$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \mathfrak{n}'$であり, $\mathfrak{g}$の随伴表現の制限で定義される$\mathfrak{a}$の$\mathfrak{n}'$への表現はcompletely reducibleである:

$$\mathfrak{n}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} ;\ [H, x] = \alpha(H)x \quad \forall H \in \mathfrak{a}\} \qquad (\alpha \in \mathfrak{a}^* \setminus \{0\})$$

とおくと $\mathfrak{n}' = \sum^{\oplus} \mathfrak{n}_\alpha$. そしてこの分解は$\langle\cdot,\cdot\rangle$に関する直交分解である*).

(ii) $0 \neq j\mathfrak{n}_\alpha \subset \mathfrak{a}$となる$\alpha \in \mathfrak{a}^* \setminus \{0\}$の全体を$\alpha_1, \cdots, \alpha_l$とすると, $l = \dim \mathfrak{a}$, $\dim \mathfrak{n}_{\alpha_k} = 1$ $(1 \le {}^\forall k \le l)$であり, 必要ならば番号を適当に付け変えると$\mathfrak{n}_\alpha \neq \{0\}$となる$\alpha \in \mathfrak{a}^* \setminus \{0\}$は次の形(ただし, すべてのpossibilitiesが起こるとは限らない).

$$\frac{1}{2}(\alpha_k + \alpha_m) \quad (1 \le m < k \le l), \quad \frac{1}{2}(\alpha_k - \alpha_m) \quad (1 \le m < k \le l)$$

$$\frac{1}{2}\alpha_k \quad (1 \le k \le l), \qquad \alpha_k \quad (1 \le k \le l)$$

$l = \dim \mathfrak{a}$のことを$\mathfrak{g}$の階数と呼びrank $\mathfrak{g}$で表す.

*) 以後ここの$\mathfrak{n}'$は現れない.

(iii) $\mathfrak{g}(0)=\mathfrak{a}+\sum_{k>m}\mathfrak{n}_{(\alpha_k-\alpha_m)/2}$, $\mathfrak{g}(1/2)=\sum_{i=1}^{l}\mathfrak{n}_{\alpha_i/2}$,

$$\mathfrak{g}(1)=\sum_{k\geq m}\mathfrak{n}_{(\alpha_k+\alpha_m)/2}$$

とおくと，$[\mathfrak{g}(k),\mathfrak{g}(m)]\subset\mathfrak{g}(k+m)$ が成り立つ．そして

$$j\mathfrak{n}_{(\alpha_k-\alpha_m)/2}=\mathfrak{n}_{(\alpha_k+\alpha_m)/2}\ (k>m),\quad j\mathfrak{n}_{\alpha_m/2}=\mathfrak{n}_{\alpha_m/2}\ (1\leq m\leq l)$$

(iv) $u_i\in\mathfrak{n}_{\alpha_i}$ $(1\leq i\leq l)$ を $[ju_i,u_i]=u_i$ と選ぶと $\alpha_k(ju_i)=\delta_{ki}$ となる．$s=\sum_{i=1}^{l}u_i$ とおくと，$\mathfrak{g}(k)$ は $\operatorname{ad}js$ の k-固有空間．

以下 $\mathfrak{g}$ の部分空間上の Lebesgue 測度はすべて内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に関して正規化されているものとする．$G(0)=\exp\mathfrak{g}(0)$, $G(1)=\exp\mathfrak{g}(1)$ をそれぞれ $\mathfrak{g}(0)$, $\mathfrak{g}(1)$ に対応する G の連結部分群とする．また，$N=\exp(\mathfrak{g}(1/2)+\mathfrak{g}(1))$ は G の高々 2-step な連結べき零部分群である．そして G は $G=N\rtimes G(0)$ と半直積で表される．さて我々の問題を述べる前に次の誘導表現 T の既約分解を考えてみよう：$T=\operatorname{Ind}_{G(0)}^{G}\mathbb{1}$ （$\mathbb{1}$ は $G(0)$ の trivial 1次元表現）．$G/G(0)$ と N とは微分同型であるから，T は $L^2(N)$ 上に実現できる（N は単連結べき零リー群故，N の Haar 測度は $\mathfrak{n}=\operatorname{Lie}N$ 上の Lebesgue 測度）：

$$(2)\quad \begin{aligned}&T(g_0)f(n)=\delta(g_0)^{1/2}f(g_0^{-1}ng_0),\quad \delta(g_0)=(\det_{\mathfrak{n}}\operatorname{Ad}g_0)^{-1},\ (g_0\in G(0))\\ &T(n_0)f(n)=f(n_0^{-1}n)\qquad\qquad (n_0\in N)\end{aligned}$$

さて，定理1(iii) から $G(0)$ は $\mathfrak{g}(1)$ に G の随伴表現の制限で作用する．従って $G(0)$ は $\mathfrak{g}(1)^*$ にその反傾表現で作用する．こ

の作用での開軌道については次の事実が知られている.

<u>命題1</u> (cf. Rossi et Vergne [8, Proposition 3.3.1]).

$\mathcal{X}=\{-1,1\}^\ell$ ($\ell=\mathrm{rank}\,\mathfrak{g}$) とおく. u_i ($1\le i\le \ell$) を定理1(iv) の如くとし, $u_i^*\in\mathfrak{g}(1)^*$ を $u_i^*(u_k)=\delta_{ik}$ ($1\le k\le \ell$), $u_i^*|_{\mathfrak{n}(\alpha_k+\alpha_m)/2}=0$ ($k>m$) で定義する. 各 $\eta=(\eta_1,\cdots,\eta_\ell)\in\mathcal{X}$ に対して, $\lambda_\eta=\sum_{i=1}^{\ell}\eta_i u_i^*\in\mathfrak{g}(1)^*$ とおくと, $\{\lambda_\eta\}_{\eta\in\mathcal{X}}$ は $\mathfrak{g}(1)^*$ における $G(0)$ の開軌道の完全代表系をなし, $\mathfrak{g}(1)^*$ の開集合でない軌道の次元は $\dim\mathfrak{g}(1)^*$ より真に小さい. 以下 $O_\eta=G(0)\cdot\lambda_\eta$ とおく

G の $\mathfrak{g}^*$ への余随伴表現による作用での開軌道については次の通り.

<u>命題2</u>. $\mathfrak{g}^*$ における G の開余随伴軌道も $\mathcal{X}=\{-1,1\}^\ell$ でパラメトライズされ, $\mathfrak{g}(1)^*\supset O_\eta\mapsto\mathcal{O}_\eta\equiv\mathfrak{g}(0)^*+\mathfrak{g}(1/2)^*+O_\eta\subset\mathfrak{g}^*$ なる一対一対応がある.

以下 $\rho:\mathfrak{g}^*/G\to\hat{G}$ を Kirillov - Bernat 対応とする. さて, <u>$\mathfrak{g}(1/2)=\{0\}$ とすると</u> (この仮定は, normal j-algebra $(\mathfrak{g},j,\omega)$ に対応する Siegel 領域が tube 領域になることと同

値)，$T=\mathrm{Ind}_{G(0)}^{G}\mathbb{1}$ は次の様にきれいに分解される：

(3) $$T \cong \bigoplus_{\eta\in\mathcal{X}} \rho(\theta_\eta)$$

証明は $\mathfrak{g}(1)$ と $\mathfrak{g}(1)^*$ の duality による (euclidean) Fourier 変換を用いると容易．分解(3)が互いに同値でない既約ユニタリ表現の重複度 1 の和になっていることに注意．そして $\rho(\theta_\eta)$ $(\eta\in\mathcal{X})$ 達で G の Plancherel 公式が書き下せることにも注意しておく．

一般に $\mathfrak{g}(1/2)\neq\{0\}$ とすると，今度は $T\cong\bigoplus_{\eta\in\mathcal{X}}\infty\rho(\theta_\eta)$ となり，各表現が無限の重複度を持って現れる．これは一つには $G(0)$ が G に比べて小さすぎるということが原因である（$T|_N$ は N の左正則表現であることに注意）．表現論的には T の部分表現 T_0 で $T_0\cong\bigoplus_{\eta\in\mathcal{X}}\rho(\theta_\eta)$ となるものは如何様にもとり出せるが，本稿では重複度を"削っ"て，$\bigoplus_{\eta\in\mathcal{X}}\rho(\theta_\eta)$ となる表現を，幾何学的な対象と関連づけて produce するのが目的である．以下，つねに $\mathfrak{g}(1/2)\neq\{0\}$ と仮定する．まず Rossi et Vergne [8, Théorème 3.5.11] による1つの結果を述べよう．そのために幾つかの準備が必要である．

簡単のため，$V=\mathfrak{g}(1/2)$ とおく．V は j で不変である（定理1(iii)）から，$j|_V$ で V を複素ベクトル空間とみなせて，これを (V, j) で表す．$V^{\pm}$ を $V_{\mathbb{C}}$ における j の固有値 $\pm\sqrt{-1}$ に対応する固有空間とする*)．N のリー代数の複素化 $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$ の元を N 上の

*) $V^{\pm}$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の可換部分代数になる．

左不変な微分作用素とみなして，$L^2_{CR}(N)$ を

$$\{f \in C^\infty(N) ;\ Xf = 0 \quad \forall X \in V^-\} \cap L^2(N)$$

の $L^2(N)$ における閉包とすると，$L^2_{CR}(N)$ は(2)で定義された G のユニタリ表現 T で不変である．一方

(4) $$Q(x, y) = \frac{1}{4}([jx, y] + i[x, y]) \qquad (x, y \in V)$$

とおくと，Q は $(V, j) \times (V, j)$ から $\mathfrak{g}(1)_{\mathbb{C}}$ への hermitian sesqui-linear map である．$n = \dim_{\mathbb{C}}(V, j)$ とし，$\mathfrak{g}(1)$ 上の一次形式の集合 Ξ, Ξ_p $(1 \le p \le n)$ を次で定義する．

(5)
$$\Xi = \{\lambda \in \mathfrak{g}(1)^* ;\ \lambda \circ Q \text{ は非退化}\}$$
$$\Xi_p = \{\lambda \in \Xi ;\ \lambda \circ Q \text{ の負の固有値は } p \text{ 個，正の固有値は } n-p \text{ 個}\}.$$

$(\mathfrak{g}, j, \omega)$ が normal j-algebra であることから，$\omega \in \Xi_n$ 従って $\Xi \neq \phi$ である．Ξ_n は $G(0)$-不変な開集合であり，Ξ_n に含まれる開 $G(0)$-軌道を全部とってそれを $\mathcal{O}_{\eta(1)}, \cdots, \mathcal{O}_{\eta(k)}$ $(\eta(m) \in \mathfrak{X},\ m = 1, \cdots, k)$ とすると，$\overline{\Xi_n} = \bigcup_{m=1}^{k} \overline{\mathcal{O}_{\eta(m)}}$（バーは閉包）である．$\mathcal{O}_{\eta(1)}, \cdots, \mathcal{O}_{\eta(k)}$ を命題 2 で得られる $\mathfrak{g}^*$ での開余随伴軌道とする．

<u>定理 2</u>（Rossi et Vergne）．$T|L^2_{CR}(N) \cong \bigoplus_{m=1}^{k} \rho(\mathcal{O}_{\eta(m)})$

<u>注意</u>　$\mathfrak{f} = \mathfrak{g}(0)_{\mathbb{C}} + V^-$ とおくと，$\mathfrak{f}$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の部分代数であ

り，$\omega \in \mathfrak{g}^*$ に従属している．余随伴軌道 $G\cdot\omega$ は開集合（実際 $\eta=(-1,\cdots,-1)\in\mathcal{X}$ に対応する $\mathcal{O}_\eta$ である）であるから，$\mathfrak{f}$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}\times\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上の交代双一次形式 $x, y \mapsto \omega([x,y])$ に関する Lagrangian (= maximal totally isotropic) subspace である．しかし，$\mathfrak{f}+\bar{\mathfrak{f}}=\mathfrak{g}(0)_{\mathbb{C}}+\mathfrak{g}(1/2)_{\mathbb{C}}$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の部分代数ではない．従って，$\mathfrak{f}$ は polarization ではなく，weak polarization でしかない（cf. Ozeki-Wakimoto [5]．本稿で使う用語 polarization は [5, Def. 2.1] では admissible ω-polarization となっている）．この weak polarization $\mathfrak{f}$ を用いて，Rossi et Vergne [8] では $T|L^2_{CR}(N)$ が定式化されている．

従って，問題は定理2でもれている表現を如何にして拾いあげるかである．$L^2_{CR}(N)$ は，いわゆる自乗可積分な CR 函数の空間であるから，次に自乗可積分な $\bar{\partial}_b$ コホモロジー空間を考えるのが自然であろう．

§2. M を C^∞ 多様体とする．Greenfield [2] に従って CR 多様体を定義する．複素化された接バンドル $T(M)_{\mathbb{C}}$ の subbundle T^{10} で次の (i), (ii) をみたすものを M 上の CR 構造という．

(i) $T^{10}\cap T^{01}=\{0\}$ (zero section)，ただし，$T^{01}=\overline{T^{10}}$.

(ii) T^{10} は involutive, i.e., α, β が T^{10} の smooth sections

のとき，その bracket $[\alpha,\beta]$ も T^{10} の section

として，対 (M, T^{10}) を CR 多様体という．以下，M 上には Riemann 構造があって，CR 構造と compatible に $T(M)_{\mathbb{C}}$ へ hermitian に拡張されているものとする，i.e., $T^{10}\perp T^{01}$ かつ conjugation $^-$ は $T_x(M)_{\mathbb{C}}$ $(\forall x\in M)$ で isometry とする．$E=(T^{10}\oplus T^{01})^{\perp}\subset T(M)_{\mathbb{C}}$ とおき，Λ^{10} (resp. Λ^{01}) を $T^{01}\oplus E$ (resp. $T^{10}\oplus E$) の $T^*(M)_{\mathbb{C}}$ における annihilator とする．

$$\Lambda^{pq}=\underbrace{\Lambda^{10}\wedge\cdots\wedge\Lambda^{10}}_{p}\wedge\underbrace{\Lambda^{01}\wedge\cdots\wedge\Lambda^{01}}_{q}\subset\Lambda^{p+q}(T^*(M)_{\mathbb{C}})$$

とおき，π_{pq} を直交射影 $\Lambda^{p+q}(T^*(M)_{\mathbb{C}})\to\Lambda^{pq}$ とする．$\Gamma(\Lambda^{pq})$ で Λ^{pq} の C^∞ sections 全体を表すとき，$\bar\partial_b:\Gamma(\Lambda^{pq})\to\Gamma(\Lambda^{p,q+1})$ を $\bar\partial_b=\pi_{p,q+1}\circ d$ (d は外微分) で定義する．T^{10} が involutive であるから $\bar\partial_b\circ\bar\partial_b=0$ となる．

さて我々の situation にもどろう．$s=\sum_{i=1}^{l}u_i\in\mathfrak{g}(1)$ を定理1(iv)の如くとし，$\Omega=G(0)\cdot s$ とおくと Ω は $\mathfrak{g}(1)$ における regular open convex cone である (Rossi and Vergne [7, Th. 4.15])．そして(4)で定義された Q は Ω-positive になるから，data Ω, Q から第2種 Siegel 領域 $D=D(\Omega,Q)$ が構成される：

$$D=\{(w,v)\in\mathfrak{g}(1)_{\mathbb{C}}\times(V,j)\,;\ \mathrm{Im}\,w-Q(v,v)\in\Omega\}$$

さて，D の Šilov 境界を $S(D)$ とすると，よく知られている

様に

$$S(D)=\{(w,v)\in \mathfrak{g}(1)_{\mathbb{C}}\times V;\ \mathrm{Im}\,w-Q(v,v)=0\}$$

となる．$S(D)$ は $\mathfrak{g}(1)_{\mathbb{C}}\times(V,j)$ の実部分多様体であるから，自然に CR 構造が入る：$\mathcal{T}(\mathfrak{g}(1)_{\mathbb{C}}\times(V,j))$ を $\mathfrak{g}(1)_{\mathbb{C}}\times(V,j)$ 上の正則接バンドルとするとき，

$$T^{10}(S(D))=T(S(D))_{\mathbb{C}}\cap\mathcal{T}(\mathfrak{g}(1)_{\mathbb{C}}\times(V,j))\big|_{S(D)}$$

で $S(D)$ に CR 構造が入る．

一方，§1 で導入したべき零リー群 $N=\exp(\mathfrak{g}(1/2)+\mathfrak{g}(1))$ の各元を $n(a,c)$ $(a\in\mathfrak{g}(1),\ c\in\mathfrak{g}(1/2)=V)$ で表すと，sesquilinear map Q の定義と Campbell-Hausdorff の公式から，N の群演算は次の様に記述される：

(6) $$n(a,c)n(a',c')=n(a+a'+2A(c,c'),\ c+c')$$

ただし，$A(c,c')=\mathrm{Im}\,Q(c,c')$.

N は $\mathfrak{g}(1)_{\mathbb{C}}\times(V,j)$ に

$$n(a,c)\cdot(w,v)=(w+a+2iQ(v,c)+iQ(c,c),\ v+c)$$

で働く．そして明らかに

$$\gamma: N\ni n(a,c)\longmapsto n(a,c)\cdot(0,0)=(a+iQ(c,c),\ c)\in S(D)$$

は上への微分同型である．さて N にも $T^{10}(N)=N\times V^{+}$ によって左不変な CR 構造が入る．

<u>補題1</u>. $\gamma: N\to S(D)$ は CR 同型．

§1で導入した$\mathfrak{g}$上の内積$\langle\cdot,\cdot\rangle$を$\mathfrak{n}$上に制限したものを再び$\langle\cdot,\cdot\rangle$で表す．この内積に関して，$\mathfrak{n}=V\oplus\mathfrak{g}(1)$は直交分解である．$j|_V$は$\langle\cdot,\cdot\rangle$に関して$V$上の直交変換であるから，$V^+$と$V^-$は，$\langle\cdot,\cdot\rangle$を拡張した$V_{\mathbb{C}}$のエルミート内積$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{C}}$で直交している．$V^+\oplus\mathfrak{g}(1)_{\mathbb{C}}$の$\mathfrak{n}^*_{\mathbb{C}}$における annihilator は自然に$(V^-)^*$と同一視されるから，$\Lambda^{01}$は$N\times(V^-)^*$とみなされ，$(V^-)^*$と$V^+$には$\mathbb{C}$-linear duality があるから，$\Gamma(\Lambda^{01})$を$N$上の$V^+$値$C^\infty$函数の空間と同一視できる．従って$\Gamma(\Lambda^{0q})$は$N$上の$\Lambda^q V^+$値$C^\infty$函数の空間とみることができる．$V^+$の基底$(Z_k)_{k=1}^n$で$(Z_k+\bar{Z}_k)_{k=1}^n$が$(V,j)$で内積$(\cdot,\cdot)$（(1)で定義されたものの$(V,j)$への制限）に関して正規直交基底となるものの全体を$\mathcal{B}(V^+)$で表す．さて，$(Z_k)_{k=1}^n\in\mathcal{B}(V^+)$をとって，$\varphi,\psi\in\Gamma_c(\Lambda^{0q})$（compact support の sections）を$\varphi=\sum_J{}'\varphi_J\otimes Z_J$（ただし$Z_J=Z_{j_1}\wedge\cdots\wedge Z_{j_q}$ for $J=(j_1,\cdots,j_q)$で$\sum_J{}'$は$1\le j_1<\cdots<j_q\le n$なる$J=(j_1,\cdots,j_q)\in\mathbb{Z}^q$についての和），$\psi=\sum_J{}'\psi_J\otimes Z_J$と表すとき，

$$(\varphi,\psi)_q=\frac{1}{2^q}\sum_J{}'\int_N\varphi_J(n)\overline{\psi_J(n)}\,dn$$

で$\Gamma_c(\Lambda^{0q})$に pre-Hilbert space structure を入れる．勿論この定義は$(Z_k)_{k=1}^n\in\mathcal{B}(V^+)$のとり方に依らない．$\vartheta_b$を$\bar{\partial}_b$の formal adjoint i.e. $(\bar{\partial}_b\varphi,\psi)_{q+1}=(\varphi,\vartheta_b\psi)_q$とし，

$\square_b = \vartheta_b \bar{\partial}_b + \bar{\partial}_b \vartheta_b$ とする.

<u>補題2.</u> $\varphi \in \Gamma(\Lambda^{0q})$, $\varphi = \sum_J{}' \varphi_J \otimes Z_J$ のとき,

$$\square_b \varphi = -2 \sum_J{}' \Big(\sum_{m \notin J} Z_m \bar{Z}_m + \sum_{m \in J} \bar{Z}_m Z_m \Big) \varphi_J \otimes Z_J$$

$$+ 2 \sum_J{}' \sum_{k=1}^{q} (-1)^{k-1} \sum_{m \notin J} [Z_{j_k}, \bar{Z}_m] \varphi_J \otimes Z_m \wedge Z_{j_1} \wedge \cdots \wedge \hat{Z}_{j_k} \wedge \cdots \wedge Z_{j_q}$$

ただし, $m \notin J = (j_1, \cdots, j_q)$ (resp. $m \in J$) とは, $\forall k$ に対して, $m \neq j_k$ (resp. ある k に対して $m = j_k$) を示し, $\hat{Z}_{j_k}$ は Z_{j_k} という項がないことを示すものとする.

さて, 定義域を $\Gamma_c(\Lambda^{0q})$ とする $\bar{\partial}_b$, ϑ_b, $\square_b$ をそれぞれ $(\bar{\partial}_b)_0^q$, $(\vartheta_b)_0^q$, $(\square_b)_0^q$ とし, $\bar{\partial}_b^q$, ϑ_b^q, $\square_b^q$ をそれぞれ作用素 $(\bar{\partial}_b)_0^q$, $(\vartheta_b)_0^q$, $(\square_b)_0^q$ の閉包とする. このとき, 簡単な議論で,

$$\mathrm{Range}\, \bar{\partial}_b^{q-1} \subset \mathrm{Dom}\, \bar{\partial}_b^q \cap \mathrm{Ker}\, \bar{\partial}_b^q$$

i.e., $\bar{\partial}_b^q \circ \bar{\partial}_b^{q-1} = 0$ が示される.

$$H^q = \mathrm{Ker}\, \bar{\partial}_b^q \ominus (\mathrm{Range}\, \bar{\partial}_b^{q-1} \text{ の閉包})$$

とおき, H^q $(q = 0, 1, \cdots, n)$ を自乗可積 $\bar{\partial}_b$ コホモロジー空間と呼ぶ.

<u>補題3.</u> $H^q = \{\varphi \in \mathrm{Dom}\, \square_b^q \,;\, \square_b^q \varphi = 0\}$ i.e. $H^q = \mathrm{Ker}\, \square_b^q$.

§3. べき零リー群N上のFourier変換について述べよう．$A = \mathrm{Im}\, Q$ は $V \times V$ から $\mathfrak{g}(1)$ への交代双一次写像で，$Q(x, y) = A(jx, y) + iA(x, y)$ である．Ξ を(5)で定義された集合とすると，容易に

$\lambda \in \Xi \Leftrightarrow$ 交代双一次形式 $\lambda \circ A$ が非退化．

がわかる．従って，$\lambda \in \Xi \hookrightarrow \mathfrak{n}^*$ の余随伴軌道は $\lambda + \mathfrak{g}(1/2)^*$ となる．ρ_λ を余随伴軌道 $\lambda + \mathfrak{g}(1/2)^*$ に対応するNの既約ユニタリ表現（同値類ではなく一つの実現）とする．$\lambda(A(x, y)) = \langle A_\lambda x, y \rangle$ で $V = \mathfrak{g}(1/2)$ 上の歪対称作用素 A_λ を定め，$Pf(\lambda \circ A) = (\det A_\lambda)^{1/2}$ とおく．Nは単連結べき零リー群であるから，作用素 $\rho_\lambda(f) = \int_N f(n) \rho_\lambda(n)^{-1} dn \quad (f \in C_c^\infty(N))$ は trace class になる．

<u>Kirillov character formula.</u> $\lambda \in \Xi$, $f \in C_c^\infty(N)$ のとき，

$$\mathrm{Tr}(\rho_\lambda(f)) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n Pf(\lambda \circ A)^{-1} \int_{\mathfrak{g}(1)} f(n(a, 0)) e^{-i\lambda(a)}\, da$$

ただし，$n = \dim_{\mathbb{C}}(V, j)$．

この指標公式と，Ξ が $\mathfrak{g}(1)^*$ で dense であることから，次の反転公式を得る．

<u>Inversion formula.</u> $\mathfrak{g}(1)^*$ 上の Lebesgue 測度を適当に正規化すると，$f\in C_c^\infty(N)$ に対して

$$f(e)=\int_{\Xi}[\mathrm{Tr}\,\rho_\lambda(f)]\,\mathrm{Pf}(\lambda\circ A)\,d\lambda$$

これより表現論の一般論を援用すると，可測な既約ユニタリ表現の族 $\{(T_\lambda,\mathfrak{H}_\lambda)\}_{\lambda\in\Xi}$ が存在して

(7) $$L^2(N)\cong\int_{\Xi}^{\oplus}\mathfrak{H}_\lambda\otimes\mathfrak{H}_\lambda^{\dagger}\,\mathrm{Pf}(\lambda\circ A)\,d\lambda\cong\int_{\Xi}^{\oplus}\mathbb{B}_2(\mathfrak{H}_\lambda)\,\mathrm{Pf}(\lambda\circ A)\,d\lambda$$

となることがわかる．ただし，$\mathfrak{H}_\lambda^{\dagger}$ は $\mathfrak{H}_\lambda$ に共役同型な Hilbert 空間，$\mathbb{B}_2(\mathfrak{H}_\lambda)$ は Hilbert 空間 $\mathfrak{H}_\lambda$ 上の Hilbert-Schmidt 作用素の全体がなす Hilbert 空間を表す．

§2で定義された H^q へ話をもどそう．N の CR 構造は左不変であるから，左移動で H^q 上への N のユニタリ表現 L_q が定義できる．

<u>定理3</u> (Rossi and Vergne [9, Th. 4.5]).

$$\sum_{q=0}^{n}L_q\cong\int_{\Xi}^{\oplus}T_\lambda\,\mathrm{Pf}(\lambda\circ A)\,d\lambda.$$

<u>§4.</u> 我々はまず，定理3と分解(7)の関係を，具体的に実現されたNの既約ユニタリ表現を通して明らかにすることから始

めよう．(V,j) 上のエルミート内積(1)に関する自己共役作用素 H_λ を $\lambda(Q(x,y))=(H_\lambda x,y)$ で定義し，(V,j) 上の複素線型作用素 j_λ を $j_\lambda=-i|H_\lambda|^{-1}H_\lambda$ $(\lambda\in\Xi)$ で定義する．ただし，$|H_\lambda|=(H_\lambda^2)^{1/2}$．そうすると，$V$ 上の実線型作用素とみたとき，j_λ は j と可換な複素構造であり，$\lambda\in\Xi_n$ のとき，$j_\lambda=j$，$\lambda\in\Xi_0$ のとき $j_\lambda=-j$ である．そして，内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に関して j_λ は直交変換になっている．以下 j_λ は V 上の実線型作用素とし，$V_{\mathbb{C}}$ 上の複素線型作用素に自然に拡張しておく．$V_{\mathbb{C}}(j_\lambda;-\sqrt{-1})$ で $V_{\mathbb{C}}$ での j_λ の固有値 $-\sqrt{-1}$ に対応する固有空間を表すことにし

$$\mathfrak{h}_\lambda=\mathfrak{g}(1)_{\mathbb{C}}+V_{\mathbb{C}}(j_\lambda;-\sqrt{-1})$$

とおく．このとき，$\mathfrak{h}_\lambda$ は $\lambda\in\Xi\hookrightarrow\mathfrak{n}^*$ における totally complex な positive polarization となる．この $\mathfrak{h}_\lambda$ を用いて N の holomorphically induced representation π_λ を構成しよう．χ_λ を $G(1)$ のユニタリ指標で $\chi_\lambda(n(a,0))=e^{i\lambda(a)}$ なるものとすると，π_λ の表現空間 $\mathfrak{H}_\lambda$ は次の (i)，(ii) をみたす $f\in C^\infty(N)$ のなす空間の完備化（(ii) の積分から定義されるノルムについて）である：

(i) $Yf=-i\lambda(Y)f$ $\quad\forall Y\in\mathfrak{h}_\lambda$ (左不変微分作用素とみなす)

(ii) $\displaystyle\int_{N/G(1)}|f(n)|^2\,d\bar{n}<+\infty$

（$d\bar{n}$ は $N/G(1)$ 上の N-不変測度）

そして各表現作用素 $\pi_\lambda(n)$ は左移動で与えられる．通常の誘導表現 $\mathrm{Ind}_{G(1)}^{N}\chi_\lambda$ の空間を $L^2(N;\lambda)$ とすると，$\mathfrak{H}_\lambda$ は $L^2(N;\lambda)$ の閉部分空間であることに注意しておく．一方，

$$Q_\lambda(Z,W)=\lambda(A(j_\lambda Z,W))+i\lambda(A(Z,W))$$

とおくと，Q_λ は $(V,j_\lambda)\times(V,j_\lambda)$ 上の負定値 hermitian sesqui-linear form である．一般に $\lambda\circ Q \neq Q_\lambda$ であることに注意．(V,j_λ) 上の正則函数 F で

$$\|F\|_\lambda^2=\int_V |F(v)|^2 \exp 2Q_\lambda(v,v)\,dv<+\infty$$

をみたすものの全体のなす Hilbert 空間を $\mathfrak{F}_\lambda(V)$ で表す．Q_λ は負定値であるから，$\mathfrak{F}_\lambda(V)\neq\{0\}$ である．そして次で与えられる対応 $\mathfrak{H}_\lambda\cap C^\infty(N)\ni f\longmapsto F\in\mathfrak{F}_\lambda(V)$

$$F(v)=f(n(0,v))\exp -Q_\lambda(v,v)$$

は，($d\bar{n}$ を適当に正規化することにより) Hilbert 空間 $\mathfrak{H}_\lambda$ と $\mathfrak{F}_\lambda(V)$ との同型に拡張される．そして，π_λ は次のユニタリ表現 U_λ に変換される．

(18) $U_\lambda(n(a,b))F(v)=\exp(i\lambda(a)+Q_\lambda(b,b)-2Q_\lambda(v,b))\cdot F(v-b)$

$(U_\lambda,\mathfrak{F}_\lambda(V))$ は余随伴軌道 $\lambda+\mathfrak{g}(1/2)^*\subset\mathfrak{n}^*$ に対応する N の既約ユニタリ表現である．

かくして N の既約ユニタリ表現の族 $(U_\lambda,\mathfrak{F}_\lambda(V))_{\lambda\in\Xi}$ を得るが，この族を"重ね合わせ"ることができる，i.e., Hilbert

空間の場 $\Xi \ni \lambda \mapsto \mathfrak{F}_\lambda(V)$ が直積分可能であることを簡単に述べておく．今，ベクトルの場 $\Xi \ni \lambda \mapsto F_\lambda \in \mathfrak{F}_\lambda(V)$ が可測（$\mathfrak{n}(1)^*$ の Lebesgue 測度に関して）であるとは，任意の $v \in V$ に対して，函数 $\lambda \mapsto F_\lambda(v)$ が可測であるときと定義する（各 F_λ は $\mathfrak{F}_\lambda(V)$ の元，従って一点 $v \in V$ での値 $F_\lambda(v)$ が意味を持つことに注意）．この様に定義された可測なベクトルの場 $\Xi \ni \lambda \mapsto F_\lambda \in \mathfrak{F}_\lambda(V)$ の全体を Γ とおくと，Γ は複素ベクトル空間であり，Dixmier [1, p.164] の Definition 1 (i) ~ (iii) をみたすことが示される（$K_\lambda(z,w) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^n Pf(\lambda \circ A) \exp -2Q_\lambda(z,w)$ が $\mathfrak{F}_\lambda(V)$ の再生核であることをフルに使う）．従って

<u>定理 4.</u>

$$L^2(N) \cong \int_\Xi^\oplus \mathfrak{F}_\lambda(V) \otimes \mathfrak{F}_\lambda(V)^\dagger \, Pf(\lambda \circ A)\, d\lambda$$
$$\cong \int_\Xi^\oplus \mathcal{B}_2(\mathfrak{F}_\lambda(V))\, Pf(\lambda \circ A)\, d\lambda$$

<u>注意</u>．ここで構成した既約ユニタリ表現の族 $(U_\lambda, \mathfrak{F}_\lambda(V))_{\lambda \in \Xi}$ は，Ogden-Vagi [4] で構成されているものを，holomorphic induction の手続きを以て整理したものである．

さて，$V_+^p(\lambda) = \wedge^p V^+$ $(\forall \lambda \in \Xi)$ とおくと，$\lambda \mapsto V_+^p(\lambda)$ は constant な Hilbert 空間の場である．Dixmier [1, Prop. 11, p.174] より次の系を得る．

系. $$L^2(N)\otimes\wedge^q V^+ \cong \int_{\Xi}^{\oplus} \mathfrak{F}_\lambda(V)\otimes\mathfrak{F}_\lambda(V)^+\otimes V_+^q(\lambda)\,\mathrm{Pf}(\lambda\circ A)\,d\lambda$$
$$\cong \int_{\Xi}^{\oplus} \mathbb{B}_2(\mathfrak{F}_\lambda(V))\otimes V_+^q(\lambda)\,\mathrm{Pf}(\lambda\circ A)\,d\lambda$$

系の同型に従って，$L^2(N)\otimes\wedge^q V^+$ の閉部分空間である H^q を特徴付けよう．V 上の複素構造 j_λ は j と可換であるから，j_λ は V^+ を不変にする．$V^+(j_\lambda;\sqrt{-1})$ で V^+ における j_λ の固有値 $\sqrt{-1}$ に対応する固有空間とし，$p(\lambda)=\dim_{\mathbb{C}} V^+(j_\lambda;\sqrt{-1})$ とおく．$\lambda\mapsto p(\lambda)$ は Ξ 上 locally constant である．実際 $\lambda\in\Xi_q$ のとき，$p(\lambda)=q$ である．$\mathfrak{z}(\lambda)=\wedge^{p(\lambda)}V^+(j_\lambda;\sqrt{-1})$ とおく．明らかに $\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{z}(\lambda)=1$ で $\lambda\in\Xi_q$ のとき，$\mathfrak{z}(\lambda)=\wedge^q V^+(j_\lambda;\sqrt{-1})\subset V_+^q(\lambda)$ となる．従って（$\lambda\mapsto j_\lambda$ は連続 (piecewise) ゆえ）$\lambda\mapsto\mathfrak{z}(\lambda)$ は 1 次元 Hilbert 空間の連続 (piecewise) な場である．

一方，任意の $\lambda\in\Xi$ に対して，V 上の恒等的に 1 なる函数 $\mathbb{1}$ は $\mathfrak{F}_\lambda(V)$ に属する．$\mathbb{B}_2(\mathfrak{F}_\lambda(V))$ に属する作用素 T で値域 Range T が 1 次元部分空間 $\mathbb{C}\mathbb{1}$ に含まれるものの全体を $\mathbb{A}(\mathfrak{F}_\lambda(V))$ とする．明らかに $\mathbb{A}(\mathfrak{F}_\lambda(V))$ は $\mathbb{B}_2(\mathfrak{F}_\lambda(V))$ の閉部分空間で，$\mathbb{A}(\mathfrak{F}_\lambda(V))$ 自身 Hilbert 空間である．

定理 5. $H^q \cong \int_{\Xi_q}^{\oplus} A(\mathfrak{F}_\lambda(V)) \otimes \mathfrak{z}(\lambda)\, Pf(\lambda\circ A)\, d\lambda$

$$\cong \int_{\Xi_q}^{\oplus} \mathfrak{F}_\lambda(V)^\dagger\, Pf(\lambda\circ A)\, d\lambda$$

$$\cong \int_{\Xi_{n-q}}^{\oplus} \mathfrak{F}_\lambda(V)\, Pf(\lambda\circ A)\, d\lambda$$

注意. (i) 写像 $A(\mathfrak{F}_\lambda(V)) \ni T \mapsto T^*(\frac{\mathbb{1}}{\|\mathbb{1}\|_\lambda}) \in \mathfrak{F}_\lambda(V)^\dagger$ が $A(\mathfrak{F}_\lambda(V))$ と $\mathfrak{F}_\lambda(V)^\dagger$ との Hilbert 空間としての同型を与える.
(ii) $\mathfrak{F}_\lambda(V)^\dagger \cong \mathfrak{F}_{-\lambda}(V)$ は $j_{-\lambda} = -j_\lambda$ から容易に導かれる.

系 (Rossi and Vergne [9]). $H^q = \{0\} \Leftrightarrow \Xi_q = \phi$

§5. さて H^q を unitary G-module にすることを考えよう. まず最初に次の事に注意する. $G = N \rtimes G(0)$ と半直積に表されるから $G/G(0)$ は reductive coset space である. よく知られている様に "$G/G(0)$ 上に G 不変な Riemann 計量が存在する $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{n} = \mathrm{Lie}\, N$ 上に $Ad_G G(0)$ 不変な正定値内積が存在する" であるから, 我々の場合 $G/G(0)$ 上には G 不変な Riemann 計量が存在しない. 従って, 通常の手続きでコホモロジー空間 H^q 上に G のユニタリ表現は定義できない. ところが, 定理 5 により, $H^q \cong \int_{\Xi_{n-q}}^{\oplus} \mathfrak{F}_\lambda(V)\, Pf(\lambda\circ A)\, d\lambda$ であり, Ξ_{n-q} は $G(0)$ space であるから, 各 fiber $\mathfrak{F}_\lambda(V)$ を $\mathfrak{F}_{g_0\cdot\lambda}(V)$ に写すユニタ

り変換が見つかれば $G=N\rtimes G(0)$ のユニタリ表現を定義することができる．しかし，j_λ と $\mathrm{Ad}_V g_0$ $(g_0\in G(0))$ の関係が簡単でないので，求める変換 $\mathfrak{F}_\lambda(V)\to\mathfrak{F}_{g_0\cdot\lambda}(V)$ を直接見い出すのは難しい（結果としては見つかる）．そこで N の既約ユニタリ表現の別の実現を作ることから再出発する．

§6. 各 $\eta\in\mathcal{E}=\{-1,1\}^l$ に対し，$\lambda_\eta\in\mathfrak{g}(1)^*$ を命題1で定義されたものとする．j_{λ_η} を λ_η に対して §4 の冒頭の様にして作られる V 上の複素構造とし，V 上の作用素 $j_{g,\eta}$ を

$$j_{g,\eta}=(\mathrm{Ad}_V g)\circ j_{\lambda_\eta}\circ(\mathrm{Ad}_V g)^{-1}\qquad(g\in G(0))$$

で定義する．$\mathrm{Ad}_V g$ と j は可換であるから，$j_{g,\eta}$ は j と可換な V 上の複素構造である．ただし，V 上の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に関して，一般には，$j_{g,\eta}$ は直交変換ではない．その代り，次の有用な関係式が成り立つ．

(9) $\quad(\mathrm{Ad}_V g_1)\circ j_{g_2,\eta}=j_{g_1g_2,\eta}\circ(\mathrm{Ad}_V g_1)\quad(\forall g_1,g_2\in G(0),\ \eta\in\mathcal{E}).$

以下 §4 と全く同じ方法で N の既約ユニタリ表現を構成する：

$$\mathfrak{h}_{g,\eta}=\mathfrak{g}(1)_{\mathbb{C}}\oplus V_{\mathbb{C}}(j_{g,\eta};-\sqrt{-1})$$

は $g\cdot\lambda_\eta$ における totally complex positive polarization である．この $\mathfrak{h}_{g,\eta}$ を用いて構成される holomorphically induced representation を $(\pi_{g,\eta},\mathfrak{H}_{g,\eta})$ とすると，$\mathfrak{H}_{g,\eta}$ は $L^2(N;\lambda)$ $(\lambda=g\cdot\lambda_\eta)$ の閉部分空間である（このことは §7 で

π_λ と $\pi_{g,\eta}$ $(\lambda = g\cdot\lambda_\eta)$ との間の intertwining operator の構成において用いる). 一方

$$Q_{g,\eta}(z,w) = \lambda(A(j_{g,\eta}z, w)) + i\lambda(A(z,w)) \qquad (\lambda = g\cdot\lambda_\eta)$$

とおくと, $Q_{g,\eta}$ は $(V, j_{g,\eta})\times(V, j_{g,\eta})$ 上の負定値 hermitian sesqui-linear form である. $(V, j_{g,\eta})$ 上の holomorphic functions F で

$$\|F\|^2_{g,\eta} = \int_V |F(v)|^2 \exp 2Q_{g,\eta}(v,v)\, dv < +\infty$$

をみたすものの全体のなす Hilbert 空間を $\mathfrak{F}_{g,\eta}(V)$ で表す. $\mathfrak{F}_{g,\eta}(V)$ 上に N の既約ユニタリ表現 $U_{g,\eta}$ が次の様に実現される.

(10) $U_{g,\eta}(n(a,b))F(v) = \exp(ig\cdot\lambda_\eta(a) + Q_{g,\eta}(b,b) - 2Q_{g,\eta}(v,b))\cdot F(v-b)$

このとき, $G(0)$ の左 Haar 測度と有限集合 $\mathfrak{X} = \{-1,1\}^l$ 上の counting measure に関して, Hilbert 空間の場 $G(0)\times\mathfrak{X} \ni (g,\eta) \mapsto \mathfrak{F}_{g,\eta}(V)$ が直積分可能ということも, §4の $\mathfrak{F}_\lambda(V)$ の場合と同様に示される.

$G(0)$ が完全可解で, $\dim\mathfrak{g}(0) = \dim\mathfrak{g}(1)$ なることから, $\mathfrak{g}(1)^*$ での各開 $G(0)$ 軌道 $\mathcal{O}_\eta$ $(\eta\in\mathfrak{X})$ と $G(0)$ は微分同型であることに注意しておく. model $(U_{g,\eta}, \mathfrak{F}_{g,\eta}(V))_{g\in G(0),\,\eta\in\mathfrak{X}}$ を用いた $L^2(N)$ の分解は次の通りである.

<u>定理6.</u> $L^2(N) \cong \sum_{\eta\in\mathfrak{X}} \int_{G(0)}^{\oplus} B_2(\mathcal{F}_{g,\eta}(V))\,\delta(g)\,dg$

ただし，$\delta(g) = (\det_{\mathfrak{n}} Ad\,g)^{-1}$ $(g\in G(0))$ で dg は $G(0)$ の左Haar測度．

<u>注意</u>．$\mathcal{F}_{g,\eta}$ が一般には V 上の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に関して直交変換ではなくなる故，model $(U_{g,\eta}, \mathcal{F}_{g,\eta}(V))_{g\in G(0),\eta\in\mathfrak{X}}$ を用いてコホモロジー空間 H^q を直接解析することは困難である．

各 $g_0\in G(0)$ と V 上の函数 F に対して

$$\mathcal{R}(g_0)F(v) = (\det_V Ad\,g_0)^{-1/2} F((Ad\,g_0)^{-1}v)$$

とおく．関係式(9)を用いて次の補題が示される．

<u>補題4.</u> (i) 任意の $g, g_0\in G(0)$ と $\eta\in\mathfrak{X}$ に対して $\mathcal{R}(g_0)$ は $\mathcal{F}_{g,\eta}(V)$ から $\mathcal{F}_{g_0g,\eta}(V)$ の上へのユニタリな写像である．

(ii) $\mathcal{R}(g_0)U_{g,\eta}(n(g_0^{-1}\cdot a, g_0^{-1}\cdot b)) = U_{g_0g,\eta}(n(a,b))\mathcal{R}(g_0)$

<u>§7.</u> この節ではつねに $\lambda = g\cdot\lambda_\eta$ $(g\in G(0), \eta\in\mathfrak{X})$ とおく．ユニタリ同値な N の2つの既約ユニタリ表現 $(U_\lambda, \mathcal{F}_\lambda(V))$ と $(U_{g,\eta}, \mathcal{F}_{g,\eta}(V))$ との間の *intertwining operator* を構成しよう．これは丁度 positive polarization のとりかえ $\mathfrak{h}_\lambda \to \mathfrak{h}_{g,\eta}$ に対応する intertwining operator である（Magneron [3] 参照）．

我々の場合，$\mathcal{C}_\lambda$も$\mathcal{C}_{g,\eta}$も共に totally complex なので議論は単純明快である．まず$\mathfrak{H}_\lambda$及び$\mathfrak{H}_{g,\eta}$が通常の誘導表現$\mathrm{Ind}_{G(1)}^{G}\chi_\lambda$の空間$L^2(N;\lambda)$の閉部分空間であったことを思い起こそう．このとき，

$$\mathfrak{H}_\lambda \xhookrightarrow{\text{injection}} L^2(N;\lambda) \xrightarrow{\text{直交射影}} \mathfrak{H}_{g,\eta}$$

で得られる作用素$\mathfrak{H}_\lambda \to \mathfrak{H}_{g,\eta}$が unitary intertwining operator を与えることは明らかである．これを$\mathfrak{F}_\lambda(V)$から$\mathfrak{F}_{g,\eta}(V)$への作用素として表すと次の様になる：

$$(11)\quad I_{g,\eta}F(v_0)=\int_V F(v)\exp[Q_\lambda(v,v)+Q_{g,\eta}(v,v)-2Q_{g,\eta}(v_0,v)]\,dv$$

とおくと，正の定数$c_{g,\eta}$が存在して，$c_{g,\eta}I_{g,\eta}$は$\mathfrak{F}_\lambda(V)$から$\mathfrak{F}_{g,\eta}(V)$の上への ユニタリな写像で$U_{g,\eta}(n)=I_{g,\eta}U_\lambda(n)(I_{g,\eta})^{-1}$ $(\forall n\in N)$が成り立つ．勿論この intertwining relation を直接確かめることも容易である（$\mathrm{Im}\,Q_\lambda=\mathrm{Im}\,Q_{g,\eta}$に注意）．(11)の右辺が$\forall F\in\mathfrak{F}_\lambda(V)$に対して絶対収束していることも注意しておく．なお，この積分変換は，Nが Heisenberg群のとき（rank $\mathfrak{g}=1$ のときがそうである）すでに Satake [10]で現れたものである．

<u>注意</u>．$\lambda\in\Xi_\eta$のとき，$\mathfrak{j}_\lambda=\mathfrak{j}_{g,\eta}=\mathfrak{j}$であるから，２つの model $(U_\lambda,\mathfrak{F}_\lambda(V))$と$(U_{g,\eta},\mathfrak{F}_{g,\eta}(V))$は同一である．このときは，(11)

は，函数 $\exp -2Q_\lambda(z,w)$ の正の定数倍が再生核ということから，確かに恒等作用素の正の定数倍になっている．

補題5. $\psi_{g,\eta}(v) = \exp \frac{1}{2}(Q_\lambda(v,v) - Q_{g,\eta}(v,v) - i\,\mathrm{Re}\,Q_{g,\eta}(v, j_\lambda v))$ とおくと，$\psi_{g,\eta} \in \mathcal{F}_{g,\eta}(V)$ であって，$I_{g,\eta}\mathbb{1} \in \mathbb{C}\psi_{g,\eta}$．

§8. $\mathbb{B}_2(\mathcal{F}_{g,\eta}(V))$ に属する作用素 T で値域 Range T が一次元部分空間 $\mathbb{C}\psi_{g,\eta}$ に含まれるものの全体を $\mathcal{A}(\mathcal{F}_{g,\eta}(V))$ で表すと $\mathcal{A}(\mathcal{F}_{g,\eta}(V))$ は Hilbert 空間 $\mathbb{B}_2(\mathcal{F}_{g,\eta}(V))$ の閉部分空間，従って $\mathcal{A}(\mathcal{F}_{g,\eta}(V))$ 自身 Hilbert 空間である．さて，

$$\int_{\Xi}^{\oplus} \mathbb{B}_2(\mathcal{F}_\lambda(V)) Pf(\lambda\circ A)\, d\lambda \ni F \mapsto \tilde{F} \in \sum_{\eta\in\mathcal{X}} \int_{G(0)}^{\oplus} \mathbb{B}_2(\mathcal{F}_{g,\eta}(V))\, \delta(g)\, dg$$

$$\tilde{F}_{g,\eta} = I_{g,\eta} F_{g\cdot\lambda_\eta} (I_{g,\eta})^{-1}$$

は上への等長写像であり，次の Hilbert 空間としての同型を引き起こす．

$$\int_{O_\eta}^{\oplus} \mathcal{A}(\mathcal{F}_\lambda(V)) Pf(\lambda\circ A)\, d\lambda \cong \int_{G(0)}^{\oplus} \mathcal{A}(\mathcal{F}_{g,\eta}(V))\, \delta(g)\, dg \qquad (\forall \eta\in\mathcal{X})$$

$\mathcal{A}(\mathcal{F}_{g,\eta}(V)) \cong \mathcal{F}_{g,\eta}(V)^\dagger \cong \mathcal{F}_{g,-\eta}(V)$ であるから，定理5，6と上の議論から次の定理を得る．

<u>定理7.</u> $H^{\mathfrak{g}} \cong \sum \int_{G(0)}^{\oplus} \mathfrak{F}_{g,-\eta}(V)\,\delta(g)\,dg$ ，ただし $\sum$ は $O_\eta \subset \Xi_{\mathfrak{g}}$ となる $\eta \in \mathfrak{X}$ すべてに対する和.

定理7の右辺は補題4(i)によって容易に unitary G-module とすることができるから，$H^{\mathfrak{g}}$ に G のユニタリ表現 $\sigma_{\mathfrak{g}}$ が定義できたことになる．ここでは $\int_{G(0)}^{\oplus} \mathcal{A}(\mathfrak{F}_{g,\eta}(V))\,\delta(g)\,dg$ でのユニタリ表現 Π_η を書き下しておこう．$e_{g,\eta} = \psi_{g,\eta}/\|\psi_{g,\eta}\|_{g,\eta}$ とし，各 $x, y \in G(0)$ と $\eta \in \mathfrak{X}$ に対して，部分的等長写像 $P_{y,x}^{\eta}$: $\mathfrak{F}_{x,\eta}(V) \to \mathfrak{F}_{y,\eta}(V)$ を次で定義する：

$$P_{y,x}^{\eta} = (\cdot\,, e_{x,\eta})e_{y,\eta}$$

このとき，容易に $P_{z,y}^{\eta} P_{y,x}^{\eta} = P_{z,x}^{\eta}$ が成り立つことがわかる．そして Π_η の表現作用素は

$$(12)\quad \begin{aligned} &\Pi_\eta(g)F(x) = \delta(g)^{-1/2} P_{x,g^{-1}x}^{\eta} F(g^{-1}x) R(g^{-1}) && (g \in G(0)) \\ &\Pi_\eta(n)F(x) = F(x)\, U_{x,\eta}(n)^{-1} && (n \in N) \end{aligned}$$

$$\left(F \in \int_{G(0)}^{\oplus} \mathcal{A}(\mathfrak{F}_{g,\eta}(V))\,\delta(g)\,dg \right)$$

<u>補題6.</u> $\rho : \mathfrak{g}^*/G \to \hat{G}$ を Kirillov-Bernat 対応とすると，$\Pi_\eta \cong \rho(\Theta_{-\eta})$

<u>定理8.</u> $\sigma_{\mathfrak{g}} \cong \sum \rho(\Theta_\eta)$，ただし $\sum$ は $O_\eta \subset \Xi_{n-\mathfrak{g}}$ となる $\eta \in \mathfrak{X}$ すべてについての和で，$\Theta_\eta = \mathfrak{g}(0)^* + \mathfrak{g}(1/2)^* + O_\eta$ である．

注意. 定理8で $q=0$ のときが定理2である. $O_\eta \subset \Xi_n$ となる様な $\eta\in\mathfrak{X}$ に対しては, $\mathfrak{z}_\lambda=\mathfrak{z}_{q,\eta}=\mathfrak{z}$ であるから, $\psi_{q,\eta}=\mathbb{1}$ であることに注意. 従ってその様な $\eta\in\mathfrak{X}$ に対しては, (12)の表示 $\pi_\eta(g)$ $(g\in G(0))$ において, $P^\eta_{x,g^{-1}x}$ の部分を $R(g)$ としてもよく, また恒等作用素におきかえてもよい. しかし, 一般の $\eta\in\mathfrak{X}$ に対しては, $R(g_0)\psi_{q,\eta}\notin\mathbb{C}\psi_{g_0 q,\eta}$ であるからそういう訳にはいかない.

かくして, $\sum_{q=0}^{n}\sigma_q \cong \sum_{\eta\in\mathfrak{X}}\rho(O_\eta)$ となり, G の Plancherel 公式に現れる G の既約ユニタリ表現が丁度一回ずつ全部並ぶ表現を部分群 N の CR 構造と関連づけて得ることができた.

なお具体的な L^2-対応の形での G の Plancherel 公式については稿を改めて報告する予定である.

References

[1] J.Dixmier, Von Neumann algebras, North-Holland, Amsterdam, 1981.

[2] S.J.Greenfield, Cauchy-Riemann equations in several complex variables, Ann. Scuola Norm. Pisa, 22 (1968), 275-314.

[3] B.Magneron, Spineurs symplectiques purs et indice de Maslov de plans lagrangiens positifs, J. Funct. Anal., 59 (1984), 90-122.

[4] R.D.Ogden and S.Vagi, Harmonic analysis of a nilpotent group and function theory on Siegel domains of type II, Adv. Math., 33 (1979), 31-92.

[5] H.Ozeki and M.Wakimoto, On polarizations of certain homogeneous spaces, Hiroshima Math. J., 2 (1972), 445-482.

[6] I.I.Pyatetskii-Shapiro, Automorphic functions and the geometry of classical domains, Gordon and Breach, New York, 1969.

[7] H.Rossi and M.Vergne, Representations of certain solvable Lie groups on Hilbert spaces of holomorphic functions and the applications to the holomorphic discrete series of a semisimple Lie group, J. Funct. Anal., 13 (1973), 324-389.

[8] ____________________, Equations de Cauchy-Riemann tangentielles associées à un domaine de Siegel, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 9 (1976), 31-80.

[9] ____________________, Group representations on Hilbert spaces defined in terms of $\bar{\partial}_b$-cohomology on the Silov boundary of a Siegel domain, Pacific J. Math., 65 (1976), 193-207.

[10] I.Satake, Factors of automorphy and Fock representations, Adv. Math., 7 (1971), 83-110.